ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ Ν. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ:

- Συνοπτική Θεωρία
- Μέθοδοι επίλυσης ασκήσεων
- Αναλυτικοί τρόποι σκέψης
- Λυμένα παραδείγματα
- Άλυτες ασκήσεις

(β) Για εξίσωση της μορφής $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=0$

<u>1η σκέψη</u> ελέγχω αν ισχύει η <u>Συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ:</u>

Αν στο πολυώνυμο : $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon$, με $\alpha\cdot\beta\cdot\delta\neq 0$ ισχύει: $\gamma=\frac{\beta}{\delta}\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\alpha$
τότε το πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων.
(αντικαθιστώ τον όρο $\gamma\chi^2$ με το άθροισμα $\frac{\beta}{\delta}\varepsilon\chi^2+\frac{\delta}{\beta}\alpha\chi^2$ και κάνω ομαδοποίηση)

Να λύσετε την εξίσωση: $\chi^4-3\chi^3-\chi^2+6\chi-2=0$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ⓘ) Εξισώσεις $1^{ου} – 2^{ου}$ βαθμού → γνωστές από Α΄ Λυκείου

Ⓘ) Εξισώσεις βαθμού $\geq 3^{ου}$

Αντιμετώπιση

1. Φέρνω όλους τους όρους στο $1^{ο}$ μέλος
2. Παραγοντοποιώ (έως να φτάσω σε παράγοντες το πολύ $2^{ου}$ βαθμού)
3. Εξισώνω κάθε παράγοντα με το μηδέν

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

Α) Όλα όσα γνωρίζω από Α΄ Λυκείου

Β) Ειδικές Περιπτώσεις – Τεχνάσματα

(α) Για εξίσωση της μορφής $\alpha\chi^{\kappa}+\beta\chi^{\lambda}+\gamma=0$ με $\kappa>\lambda$

ελέγχω αν $\beta=\pm\alpha\pm\gamma$ και αντικαθιστώ το $\beta\chi^{\kappa} \rightarrow \pm\alpha\chi^{\kappa}\pm\gamma\chi^{\kappa}$

Διάσπαση μεσαίου όρου

Παρατήρηση: Αυτή η διάσπαση δεν εξασφαλίζει την παραγοντοποίηση

π.χ → Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) $2\chi^3-\chi^2+3=0$ (ii) $\chi^4+5\chi-6=0$ (iii) $3\chi^3-\chi^2+2=0$

Λύση

$-1=2-3$

(i) $2\chi^3-\chi^2+3=0 \Leftrightarrow 2\chi^3+2\chi^2-3\chi^2+3=0 \Leftrightarrow 2\chi^2(\chi+1)-3(\chi^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$$2\chi^2(\chi+1)-3(\chi-1)(\chi+1)=0 \Leftrightarrow (\chi+1)(2\chi^2-3\chi+3)=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \chi+1=0 \Leftrightarrow \chi=-1 \\ 2\chi^2-3\chi+3=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{αδύνατη} \end{array}\right.$$

$5=-1+6$

(ii) $\chi^4+5\chi-6=0 \Leftrightarrow \chi^4-\chi+6\chi-6=0 \Leftrightarrow \chi(\chi^3-1)+6(\chi-1)=0 \Leftrightarrow$

$\chi(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)+6(\chi-1)=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi^3+\chi^2+\chi+6)=0 \Leftrightarrow ....$

Για την παραγ/ση του $\chi^3+\chi^2+\chi+6$ χρειάζεται η (ε) σκέψη

$-1=-3+2$

(iii) $3\chi^3-\chi^2+2=0 \Leftrightarrow 3\chi^3-3\chi^2+2\chi^2+2=0 \Leftrightarrow 3\chi(\chi-1)+2(\chi^2+1)=0$

Δεν βγαίνει η ομαδοποίηση

(β) Για εξίσωση της μορφής $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=0$

$1^{η}$ σκέψη ελέγχω αν ισχύει η **Συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ:**

Αν στο πολυώνυμο : $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon$, με $\alpha\cdot\beta\cdot\delta\neq 0$ ισχύει : $\gamma=\frac{\beta}{\delta}\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\alpha$

τότε το πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων.

(αντικαθιστώ τον όρο $\gamma\chi^2$ με το άθροισμα $\frac{\beta}{\delta}\varepsilon\chi^2+\frac{\delta}{\beta}\alpha\chi^2$ και κάνω ομαδοποίηση)

Σχόλιο:

π.χ → Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) $\chi^4-3\chi^3-\chi^2+6\chi-2=0$ (ii) $2\chi^4-3\chi^3+6\chi-8=0$

Λύση

Παρατηρώ ότι για τους συντελεστές ισχύει $\frac{-3}{6}\cdot(-2)+\frac{6}{-3}\cdot 1=1-2=-1$

άρα ικανοποιείται η συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ οπότε έχω:

(i) $\chi^4-3\chi^3-\chi^2+6\chi-2=0 \Leftrightarrow \chi^4-3\chi^3+\chi^2-2\chi^2+6\chi-2=0 \Leftrightarrow$

$$\chi^2\left(\chi^2-3\chi+1\right)-2\left(\chi^2-3\chi+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\chi^2-3\chi+1\right)\left(\chi^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2-3\chi+1=0 & (1) \\ \chi^2-2=0 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) έχω $\chi=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ή $\chi=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ και από την (2) έχω $\chi=-\sqrt{2}$ ή $\chi=\sqrt{2}$

$$\frac{-3}{6}\cdot(-8)+\frac{6}{-3}\cdot 2=4-4=0$$

(ii) $2\chi^4-3\chi^3+6\chi-8=0 \Leftrightarrow 2\chi^4-3\chi^3-4\chi^2+4\chi^2+6\chi-8=0 \Leftrightarrow$

$$\chi^2\left(2\chi^2-3\chi+4\right)-2\left(2\chi^2-3\chi+4\right)=0 \Leftrightarrow \left(2\chi^2-3\chi+4\right)\left(\chi^2-2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi^2-3\chi+4=0 \xrightarrow{\Delta=-23<0} \text{αδύνατη} \\ \chi^2-2=0 \Rightarrow \chi=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

2^{η} σκέψη ελέγχω αν ισχύει $\delta=\kappa\beta$ και $\varepsilon=\kappa^2\alpha$

δηλ. αν η εξίσωση είναι της μορφής: $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\kappa\beta\chi+\kappa^2\alpha=0$, $\alpha\neq 0$

Τότε ακολουθώ τα παρακάτω βήματα

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\kappa\beta\chi+\kappa^2\alpha=0 \overset{:\chi^2}{\Leftrightarrow} \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma+\frac{\kappa\beta}{\chi}+\frac{\kappa^2\alpha}{\chi^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(\chi^2+\frac{\kappa^2}{\chi^2}\right)+\beta\left(\chi+\frac{\kappa}{\chi}\right)+\gamma=0 \quad (1)$$

Θέτω $\chi+\frac{\kappa}{\chi}=\omega \Leftrightarrow \left(\chi+\frac{\kappa}{\chi}\right)^2=\omega^2 \Leftrightarrow \chi^2+2\kappa+\frac{\kappa^2}{\chi^2}=\omega^2 \Leftrightarrow \chi^2+\frac{\kappa^2}{\chi^2}=\omega^2-2\kappa$ οπότε

η (1) $\Leftrightarrow \alpha\left(\omega^2-2\kappa\right)+\beta\omega+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma-2\alpha\kappa=0$ που είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς άγνωστο τον ω και υπολογίζω τον ω

Μετά αντικαθιστώ στην $\chi+\frac{\kappa}{\chi}=\omega$ και υπολογίζω τον χ

π.χ → Να λυθεί η εξίσωση: $2\chi^4-3\chi^3-13\chi^2+6\chi+8=0$

Λύση

Παρατηρώ ότι $\frac{-3}{6}8+\frac{6}{-3}2=-4-4=-8\neq-13$ άρα δεν ικανοποιείται η συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ

όμως $6=(-2)\cdot(-3)$ και $8=(-2)^2\cdot 2$ άρα έχω $\delta=\kappa\beta$ και $\varepsilon=\kappa^2\alpha$ με $\kappa=-2$

άρα θα δουλέψω με τη δεύτερη σκέψη

$$2\chi^4-3\chi^3-13\chi^2+6\chi+8=0 \underset{\text{διαιρώ με } \chi^2}{\overset{\text{η τιμή } \chi=0 \text{ δεν είναι λύση}}{\Leftrightarrow}} 2\chi^2-3\chi-13+\frac{6}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(\chi^2+\frac{4}{\chi^2}\right)-3\left(\chi-\frac{2}{\chi}\right)-13=0 \quad (1)$$

Θέτω $\chi-\frac{2}{\chi}=\omega \Leftrightarrow \left(\chi-\frac{2}{\chi}\right)^2=\omega^2 \Leftrightarrow \chi^2-4+\frac{4}{\chi^2}=\omega^2 \Leftrightarrow \chi^2+\frac{4}{\chi^2}=\omega^2+4$ άρα η (1) ισοδύναμα γράφεται: $2\left(\omega^2+4\right)-3\omega-13=0 \Leftrightarrow 2\omega^2-3\omega-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=-1\\ \omega=\frac{5}{2}\end{cases}$

Για $\omega=-1$ έχω $\chi-\frac{2}{\chi}=-1 \overset{\chi\neq 0}{\Leftrightarrow} \chi^2-2=-\chi \Leftrightarrow \chi^2+\chi-2=0 \Leftrightarrow \chi=1$ ή $\chi=-2$

Για $\omega=\frac{5}{2}$ έχω $\chi-\frac{2}{\chi}=\frac{5}{2} \overset{2\chi\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\chi^2-4=5\chi \Leftrightarrow 2\chi^2-5\chi-4=0 \Leftrightarrow \chi=\frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$

(γ) Για εξίσωση στην οποία ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε μία παράσταση ή σε παραστάσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά

Αντιμετώπιση: (Χρήση βοηθητικής μεταβλητής)
Ονομάζω την παράσταση που επαναλαμβάνεται $=\omega$

π.χ → Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\chi^2-5\chi+1\right)^3-3\left(\chi^2-5\chi\right)^2+3\chi^2-15\chi=21$ (1)

Λύση

Σκέψη

Θυμάμαι από Α΄ Λυκείου ότι αν υπάρχουν παρενθέσεις δεν βιάζομαι να τις ΄΄διώξω΄΄
Κοιτάζω λοιπόν τους όρους που είναι εκτός παρενθέσεων και έχω (1) $\Leftrightarrow$
$\left(\chi^2-5\chi+1\right)^3-3\left(\chi^2-5\chi\right)^2+3\chi^2-15\chi-21=0 \Leftrightarrow \left(\chi^2-5\chi+1\right)^3-3\left(\chi^2-5\chi\right)^2+3\left(\chi^2-5\chi-7\right)=0$
άρα ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε παραστάσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά

$(1) \Leftrightarrow \left(\chi^2-5\chi+1\right)^3-3\left(\chi^2-5\chi\right)^2+3\chi^2-15\chi-21=0 \Leftrightarrow$

$\left(\chi^2-5\chi+1\right)^3-3\left(\chi^2-5\chi\right)^2+3\left(\chi^2-5\chi-7\right)=0$ (1)

Με συμφέρει να θέσω $\chi^2-5\chi+1=\omega$ για να έχω λιγότερες πράξεις

Θέτω $\chi^2-5\chi+1=\omega$ οπότε $\chi^2-5\chi=\omega-1$ και $\chi^2-5\chi-7=\omega-8$ άρα

(1) $\Leftrightarrow \omega^3-3(\omega-1)^2+3(\omega-8)=0 \Leftrightarrow \omega^3-3(\omega^2-2\omega+1)+3\omega-24=0 \Leftrightarrow \omega^3-3\omega^2+9\omega-27=0 \Leftrightarrow$

$\omega^2(\omega-3)+9(\omega-3)=0 \Leftrightarrow (\omega-3)\left(\omega^2+9\right)=0 \overset{\omega^2+9\neq 0}{\Leftrightarrow} \omega=3$

Άρα $\chi^2-5\chi+1=3 \Leftrightarrow \chi^2-5\chi-2=0 \Leftrightarrow \chi=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

(δ) Για εξίσωση στην οποία <u>δεν υπάρχει σταθερός όρος</u>, <u>ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε δύο παραστάσεις</u> $A(\chi)$, $B(\chi)$ και <u>όλοι οι όροι της έχουν τον ίδιο συνολικό βαθμό ως προς τις παραστάσεις</u> $A(\chi)$ και $B(\chi)$ (Ομογενής Εξίσωση)

Αντιμετώπιση:
Επιλέγω μία από τις $A(\chi)$, $B(\chi)$ (όποια επαναλαμβάνεται περισσότερες φορές, έστω την $A(\chi)$)
Ελέγχω αν οι ρίζες χ_κ της $A(\chi)=0$ είναι και ρίζες της εξίσωσης

- Αν ναι, τις δέχομαι και λέω: αναζητώ λύσεις της εξίσωσης $\chi\neq\chi_\kappa$
- Αν όχι, απλά συνεχίζω

Διαιρώ όλους τους όρους της εξίσωσης με την παράσταση $A(\chi)$ στο μεγαλύτερο εκθέτη της
Καταλήγω σε εξίσωση στην οποία ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε μία παράσταση(μορφή (γ))

π.χ → Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) $\chi^3-3(\chi^2-2)\chi^2+2(\chi^2-2)^3=0 \quad (1)$

(ii) $(2\chi^2+\chi-3)^3-3(2\chi^2+\chi-3)^2(\chi^2-1)+4(\chi^2-1)^3=0 \quad (2)$

<u>Λύση</u>

(i) Παρατηρώ ότι η εξίσωση δεν έχει σταθερό όρο, ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε δύο παραστάσεις $A(\chi)=\chi$, $B(\chi)=(\chi^2-2)$ και όλοι οι όροι της έχουν τον ίδιο συνολικό βαθμό ως προς τις παραστάσεις $A(\chi)=\chi$, $B(\chi)=(\chi^2-2)$ (3^o βαθμό)

Ελέγχω αν η τιμή $\chi=0$ επαληθεύει την (1)

Έχω: $0^3-3(0^2-2)0^2+2(0^2-2)^3=0 \Leftrightarrow -16=0$ αδύνατο άρα η τιμή $\chi=0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης

Για $\chi\neq 0$ (1) $\overset{\text{διαιρώ με } \chi^3}{\Leftrightarrow} \dfrac{\chi^3}{\chi^3}-\dfrac{3(\chi^2-2)\chi^2}{\chi^3}+\dfrac{2(\chi^2-2)^3}{\chi^3}=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{\chi^2-2}{\chi}\right)^3-3\dfrac{\chi^2-2}{\chi}+1=0$ (α)

Θέτω $\dfrac{\chi^2-2}{\chi}=\omega$ οπότε (α) $\Leftrightarrow 2\omega^3-3\omega+1=0 \Leftrightarrow 2\omega^3-2\omega-\omega+1=0 \Leftrightarrow$

$$2\omega^2(\omega^2-1)-(\omega-1)=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(2\omega^2+2\omega-1)=0 \Leftrightarrow \omega=1, \omega=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \omega=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

Για $\omega=1$ έχω $\dfrac{\chi^2-2}{\chi}=1 \Leftrightarrow \chi^2-2=\chi \Leftrightarrow \chi^2-\chi-2=0 \Leftrightarrow \chi=-1, \chi=2$

Για $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ έχω $\dfrac{\chi^2-2}{\chi}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\chi^2-(-1+\sqrt{3})\chi-4=0 \Leftrightarrow \chi_{1,2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{36-2\sqrt{3}}}{4}$

Για $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ έχω $\dfrac{\chi^2-2}{\chi}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\chi^2-(-1-\sqrt{3})\chi-4=0 \Leftrightarrow \chi_{1,2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{36+2\sqrt{3}}}{4}$

(ii) Παρατηρώ ότι η εξίσωση δεν έχει σταθερό όρο, ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε δύο παραστάσεις $A(\chi)=(2\chi^2+\chi-3)$, $B(\chi)=(\chi^2-1)$ και όλοι οι όροι της έχουν τον ίδιο συνολικό βαθμό ως προς τις παραστάσεις $A(\chi)=(2\chi^2+\chi-3)$, $B(\chi)=(\chi^2-1)$ (3^o βαθμό)

Ελέγχω αν οι τιμές $\chi=1$ και $\chi=-1$ επαληθεύουν την (2)

Για $\chi=1$ έχω: $(2\cdot 1^2+1-3)^3-3(2\cdot 1^2+1-3)^2(1^2-1)+4(1^2-1)^3=0$ ισχύει άρα η τιμή $\chi=1$ είναι μία λύση της εξίσωσης

Για $\chi=-1$ έχω: $(2\cdot(-1)^2-1-3)^3-3(2\cdot(-1)^2-1-3)^2((-1)^2-1)+4((-1)^2-1)^3=0$ αδύνατο άρα η τιμή $\chi=-1$ δεν είναι λύση της εξίσωσης

Αναζητώ λύσεις της εξίσωσης διάφορες των ± 1

Για $\chi\neq\pm 1$ (2) $\overset{\text{διαιρώ με } (\chi^2-1)^3}{\Leftrightarrow} \dfrac{(2\chi^2+\chi-3)^3}{(\chi^2-1)^3}-3\dfrac{(2\chi^2+\chi-3)^2(\chi^2-1)}{(\chi^2-1)^3}+4\dfrac{(\chi^2-1)^3}{(\chi^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2\chi^2+\chi-3}{\chi^2-1}\right)^3-3\left(\frac{2\chi^2+\chi-3}{\chi^2-1}\right)^2+4=0 \quad (\beta)$$

Θέτω $\dfrac{2\chi^2+\chi-3}{\chi^2-1}=\omega$ οπότε $(\beta)\Leftrightarrow \omega^3-3\omega^2+4=0\Leftrightarrow \omega^3+\omega^2-4\omega^2+4=0\Leftrightarrow$

$\omega^2(\omega+1)-4(\omega^2-1)=0\Leftrightarrow \omega^2(\omega+1)-4(\omega+1)(\omega-1)=0\Leftrightarrow (\omega+1)(\omega^2-4\omega+4)=0\Leftrightarrow$

$(\omega+1)(\omega^2-4\omega+4)=0\Leftrightarrow (\omega+1)(\omega-2)^2=0\Leftrightarrow \omega=-1$ ή $\omega=2$

Για $\omega=-1$ έχω $\dfrac{2\chi^2+\chi-3}{\chi^2-1}=-1\Leftrightarrow 2\chi^2+\chi-3=-\chi^2+1\Leftrightarrow 3\chi^2+\chi-4=0\Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1 \text{ απορρίπτεται}\\ \chi=-4/3 \text{ δεκτη}\end{cases}$

Για $\omega=2$ έχω $\dfrac{2\chi^2+\chi-3}{\chi^2-1}=2\Leftrightarrow 2\chi^2+\chi-3=2\chi^2-2\Leftrightarrow \chi-1=0\Leftrightarrow \chi=1$ απορρίπτεται

Τελικά η εξίσωση έχει λύσεις τις $\chi=1$ και $\chi=-\dfrac{4}{3}$

β΄ τρόπος

Σκέψη

Θυμάμαι από Α΄ Λυκείου , ότι αν υπάρχουν παρενθέσεις , ίσως να έχει γίνει μια πρώτη παραγοντοποίηση (ομαδοποίηση), οπότε συνεχίζω την παραγοντοποίηση, ελπίζοντας να βρω κοινό παράγοντα σ' όλους τους όρους Παρατηρώ ότι $2\chi^2+\chi-3 \overset{\text{ρίζες}}{\underset{\chi=1,\chi=3/2}{=}} 2(\chi-1)\left(\chi+\dfrac{3}{2}\right)=(\chi-1)(2\chi+3)$ και $\chi^2-1=(\chi-1)(\chi+1)$

$(2)\Leftrightarrow [(\chi-1)(2\chi+3)]^3-3[(\chi-1)(2\chi+3)]^2(\chi-1)(\chi+1)+4[(\chi-1)(\chi+1)]^3=0\Leftrightarrow$

$(\chi-1)^3(2\chi+3)^3-3(\chi-1)^2(2\chi+3)^2(\chi-1)(\chi+1)+4(\chi-1)^3(\chi+1)^3=0\Leftrightarrow$

$(\chi-1)^3\left[(2\chi+3)^3-3(2\chi+3)^2(\chi+1)+4(\chi+1)^3\right]=0\Leftrightarrow$

$(\chi-1)^3=0$ (α) ή $(2\chi+3)^3-3(2\chi+3)^2(\chi+1)+4(\chi+1)^3=0$ (β)

Από (α) έχω $\chi=1$

Για την (β) παρατηρώ ότι η τιμή $\chi=-1$ δεν την επαληθεύει

$(\beta)\overset{\text{διαιρώ με }(\chi+1)^3}{\Leftrightarrow} \dfrac{(2\chi+3)^3}{(\chi+1)^3}-3\dfrac{(2\chi+3)^2(\chi+1)}{(\chi+1)^3}+4\dfrac{(\chi+1)^3}{(\chi+1)^3}=0\Leftrightarrow \left(\dfrac{2\chi+3}{\chi+1}\right)^3-3\left(\dfrac{2\chi+3}{\chi+1}\right)^2+4=0$ (I)

Θέτω $\dfrac{2\chi+3}{\chi+1}=\omega$ οπότε (I) $\Leftrightarrow \omega^3-3\omega^2+4=0\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow \omega=-1$ ή $\omega=2$

Για $\omega=-1$ έχω $\dfrac{2\chi+3}{\chi+1}=-1\Leftrightarrow 2\chi+3=-\chi-1\Leftrightarrow \chi=-\dfrac{4}{3}$

Για $\omega=2$ έχω $\dfrac{2\chi+3}{\chi+1}=2\Leftrightarrow 2\chi+3=2\chi+2\Leftrightarrow 0\chi=-1$ αδύνατη

Τελικά η εξίσωση έχει λύσεις τις $\chi=1$ και $\chi=-\dfrac{4}{3}$

(ε) Για οποιαδήποτε πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+....+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$, $\alpha_\nu\cdot\alpha_0\neq 0$, με ακέραιους συντελεστές $\alpha_\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa=0,1,2,..$

Ίσως γίνεται παραγοντοποίηση και επίλυση με τη βοήθεια του σχήματος Horner

Αντιμετώπιση

1- Γράφω όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες, (που είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0)

2- Ελέγχω τη μία κατόπιν της άλλης αν είναι ρίζα της εξίσωσης (μέχρι να βρω την πρώτη ρίζα ρ_1)

3- Με τη βοήθεια του σχήματος Horner παραγοντοποιώ το πολυώνυμο και γράφω την εξίσωση στη μορφή $(\chi-\rho_1)(\alpha_\nu\chi^{\nu-1}+\beta_{\nu-1}\chi^{\nu-2}+....+\beta_1\chi+\beta_0)=0$, $\alpha_\nu\cdot\beta_0\neq 0$,

4- Ελέγχω αν το νέο πολυώνυμο (πηλίκο: $\alpha_\nu\chi^{\nu-1}+\beta_{\nu-1}\chi^{\nu-2}+....+\beta_1\chi+\beta_0$) παραγοντοποιείται (λύνεται) με μία από τις γνωστές (προηγούμενες) μεθόδους, ή επαναλαμβάνω τη διαδικασία, μέχρι να καταλήξω (αν είναι δυνατό) σε πολυώνυμο το πολύ δευτέρου βαθμού

5- Αν κανένας από τους διαιρέτες του σταθερού όρου δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε γράφω όλες τις πιθανές κλασματικές ρίζες, (που είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0, προς τους διαιρέτες του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου α_ν)

*- Επαναλαμβάνω τα βήματα από το 2- βήμα και μετά

Παρατηρήσεις

α- Η παραγοντοποίηση με τη βοήθεια του σχήματος Horner είναι μία από τις καλύτερες μεθόδους ***μόνο*** αν έμμεσα ή άμεσα είναι γνωστή κάποια ρίζα του πολυωνύμου

β- Συνιστάται να εξαντλώ τις προσπάθειες παραγοντοποίησης με προηγούμενες μεθόδους και μετά να δοκιμάζω την παραγοντοποίηση με τη βοήθεια του σχήματος Horner, αφού δεν είναι σίγουρο ότι το πολυώνυμο έχει ακέραιες ή κλασματικές ρίζες, αλλά και αν έχει, ίσως χρειαστώ πολύ χρόνο (πολλές δοκιμές) μέχρι να τις βρώ

γ- Αν οι συντελεστές ενός πολυωνύμου είναι ομόσημοι τότε αποκλείεται να δέχεται θετική ρίζα

δ- Στο 4- βήμα αντιμετώπισης, (σε περίπτωση που χρειαστεί να δοκιμάσω παραγοντοποίηση με τη βοήθεια του σχήματος Horner) αν κάποιος από τους διαιρέτες του β_0 είναι ίδιος με διαιρέτη του α_0, που δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου θα αγνοηθεί (δεν θα ελεγχθεί αν είναι ρίζα – δεν είναι σίγουρα –)

ε- Αν το άθροισμα των συντελεστών ισούται με μηδέν τότε το $\chi=1$ είναι μια ρίζα

π.χ → Να λυθούν οι εξισώσεις: (i) $2\chi^4+3\chi^3-3\chi^2-5\chi-6=0$ (ii) $\chi^4+7\chi^3+13\chi^2-3\chi-18=0$

(iii) $0{,}1\chi^3-\frac{1}{10}\chi^2-\frac{2}{5}=0$ (iv) $\chi^5-4\chi^4-5\chi^3-20\chi^2+6\chi+24=0$ (v) $\chi^4-5\chi^3+2\chi^2+10\chi-8=0$

Λύση

Δεν γίνεται παραγοντοποίηση με μεθόδους Α΄ Λυκείου ή με τεχνάσματα, θα δοκιμάσω με βοήθεια του σχήματος Horner

(i) $2\chi^4+3\chi^3-3\chi^2-5\chi-6=0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(\chi)=2\chi^4+3\chi^3-3\chi^2-5\chi-6$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -6 δηλ: ±1, ±2, ±3, ±6

Για $\chi=1$ έχω $P(1)=2\cdot1^4+3\cdot1^3-3\cdot1^2-5\cdot1-6=-9\neq0$

Για $\chi=-1$ έχω $P(-1)=2\cdot(-1)^4+3\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=-1\neq0$

Για $\chi=2$ έχω $P(2)=2\cdot2^4+3\cdot2^3-3\cdot2^2-5\cdot2-6=26\neq0$

Για $\chi=-2$ έχω $P(-2)=2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-6=0$

Με το σχήμα Horner έχω

Δεν παραγοντοποιείται με μεθόδους Α΄ Λυκείου ή με τεχνάσματα, θα δοκιμάσω με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -3 & -5 & -6 & -2 \\ \downarrow & -4 & 2 & 2 & 6 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & -3 & 0 & \end{array}$$

Οπότε (1) $\Leftrightarrow(\chi+2)(2\chi^3-\chi^2-\chi-3)=0\ (1')$

Οι τιμές ±1 και 2 δοκιμάστηκαν πιο πάνω και δεν είναι ρίζες του $P(\chi)$ άρα ούτε του $\Pi(\chi)$

Για το $\Pi(\chi)=2\chi^3-\chi^2-\chi-3$

πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του σταθερού όρου -3 δηλ: ±1, ±3

Οι τιμές $\chi = \pm 1, 2$ αποκλείεται να είναι ρίζες της $2\chi^3 - \chi^2 - \chi - 3 = 0$, γιατί τότε θα ήταν ρίζες και της $2\chi^4 + 3\chi^3 - 3\chi^2 - 5\chi - 6 = 0$, κάτι που δεν προέκυψε από τις δοκιμές στο $P(\chi)$

Για $\chi = 3$ έχω $\Pi(3) = 2\cdot 3^3 - 3^2 - 3 - 3 = 3 \neq 0$

Για $\chi = -3$ έχω $\Pi(-3) = 2(-3)^3 - (-3)^2 - (-3) - 3 = -63 \neq 0$

Πιθανές κλασματικές ρίζες, τα κλάσματα που έχουν αριθμητή έναν από τους διαιρέτες του σταθερού όρου -3 $(\delta\eta\lambda:\ \pm 1, \pm 2, \pm 3)$ και παρονομαστή έναν από τους διαιρέτες του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου 2 $(\delta\eta\lambda:\ \pm 1, \pm 2)$

Άρα πιθανές κλασματικές ρίζες οι : $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{3}{2}$

Για να μην δυσκολευτώ στις πράξεις

Θα υπολογίσω τα $\Pi(\pm 1/2)$ και $\Pi(\pm 3/2)$ με Horner

Με το σχήμα Horner έχω

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -3 & 1/2 \\ \downarrow & 1 & 0 & -1/2 & \\ \hline 2 & 0 & -1 & -7/2 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -3 & -1/2 \\ \downarrow & -1 & 1 & 0 & \\ \hline 2 & -2 & 0 & -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -3 & 3/2 \\ \downarrow & 3 & 3 & 3 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Άρα $\Pi(1/2) = -7/2$ Άρα $\Pi(-1/2) = -3$ Άρα $\Pi(3/2) = 0$

Οπότε από το τελευταίο σχήμα Horner

$$(1') \Leftrightarrow (\chi+2)(\chi-3/2)\left(2\chi^2+2\chi+2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+2=0 \Leftrightarrow \chi=-2 \\ \chi-3/2=0 \Leftrightarrow \chi=3/2 \\ 2\chi^2+2\chi+2=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{αδύνατη} \end{cases}$$

(ii) $\chi^4 + 7\chi^3 + 13\chi^2 - 3\chi - 18 = 0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(\chi) = \chi^4 + 7\chi^3 + 13\chi^2 - 3\chi - 18$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -18 δηλ: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

Για $\chi = 1$ έχω $P(1) = 1^4 + 7\cdot 1^3 + 13\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 18 = 0$

Με το σχήμα Horner έχω

Δεν παραγοντοποιείται με μεθόδους Α΄ Λυκείου ή με τεχνάσματα, θα δοκιμάσω με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 13 & -3 & -18 & 1 \\ \downarrow & 1 & 8 & 21 & 18 & \\ \hline 1 & 8 & 21 & 18 & 0 & \end{array}$$

Οπότε (1) $\Leftrightarrow (\chi-1)\left(\chi^3+8\chi^2+21\chi+18\right)=0\ (1')$

Αφού όλοι οι συντελεστές του $\Pi(\chi)$ είναι θετικοί αποκλείεται να έχει θετική ρίζα. Δοκιμάζω τις αρνητικές

Για το $\Pi(\chi) = \chi^3 + 8\chi^2 + 21\chi + 18$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του σταθερού όρου 18 δηλ: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

Με το σχήμα Horner έχω

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 21 & 18 & -1 \\ \downarrow & -1 & -7 & -14 & \\ \hline 1 & 7 & 14 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 21 & 18 & -2 \\ \downarrow & -2 & -12 & -18 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 0 & \end{array}$$

Άρα $\Pi(-1) = 4$ Άρα $\Pi(-2) = 0$

Οπότε από το 2^0 σχήμα Horner έχω

$$(1') \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi+2)(\chi^2+6\chi+9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1 \\ \chi+2=0 \Leftrightarrow \chi=-2 \\ \chi^2+6\chi+9=0 \Leftrightarrow (\chi+3)^2=0 \Leftrightarrow \chi=-3 \end{cases}$$

Δεν έχει ακέραιους συντελεστές, θα τους κάνω ακέραιους πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με 10

(iii) $0{,}1\chi^3-\frac{1}{10}\chi^2-\frac{2}{5}=0 \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} \chi^3-\chi^2-4=0 \ (1)$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4 δηλ: ±1, ±2, ±4

Με το σχήμα Horner έχω

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 & 1 \\ \downarrow & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 & 2 \\ \downarrow & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Άρα $\Pi(1)=-4$ Άρα $\Pi(2)=0$

Οπότε από το 2^0 σχήμα Horner έχω

$$(1) \Leftrightarrow (\chi-2)(\chi^2+\chi+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-2 \Leftrightarrow \chi=2 \\ \chi^2+\chi+2=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{αδύνατη} \end{cases}$$

(iv) $\chi^5-4\chi^4-5\chi^3-20\chi^2+6\chi+24=0 \ (1)$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του 24 δηλ: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$

Με δοκιμές, φτάνοντας στον αριθμό -4 με το σχήμα Horner έχω

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 4 & -5 & -20 & 6 & 24 & -4 \\ \downarrow & -4 & 0 & 20 & 0 & -24 & \\ \hline 1 & 0 & -5 & 0 & 6 & 0 & \end{array}$$

Άρα $(1) \Leftrightarrow (\chi+4)(\chi^4-5\chi^2+6)=0 \underset{\rho_1=2\ ,\ \rho_2=3}{\overset{\text{2–βάθμιο τριώνυμο ως προς } \chi^2 \text{ με ρίζες}}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow (\chi+4)(\chi^2-2)(\chi^2-3)=0 \Leftrightarrow$

$(\chi+4=0 \Leftrightarrow \chi=-4)$ ή $(\chi^2-2=0 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{2})$ ή $(\chi^2-3=0 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{3})$

(v) $\chi^4-5\chi^3+2\chi^2+10\chi-8=0 \ (1)$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του -8 δηλ: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

Με σχήμα Horner έχω

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 2 & 10 & -8 & 1 \\ \downarrow & 1 & -4 & -2 & 8 & \\ \hline 1 & -4 & -2 & 8 & 0 & \end{array}$$

Οπότε $(1) \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi^3-4\chi^2-2\chi+8)=0 \Leftrightarrow (\chi-1)[\chi^2(\chi-4)-2(\chi-4)]=0 \Leftrightarrow$

$$(\chi-1)(\chi-4)(\chi^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1 \\ \chi-4=0 \Leftrightarrow \chi=4 \\ \chi^2-2=0 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> (συνθήκη *ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ*)

Το πολυώνυμο $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha\,\beta\,\delta\neq 0$ αναλύεται σε γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων, ενός διωνύμου και ενός τριωνύμου, αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη: $\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon+\dfrac{\delta}{\beta}\alpha=\gamma$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ευθύ Έστω $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\left(\kappa\chi^2+\lambda\right)\cdot\left(\mu\chi^2+\nu\chi+\tau\right)\Leftrightarrow$

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\kappa\mu\chi^4+\kappa\nu\chi^3+\left(\kappa\tau+\lambda\mu\right)\chi^2+\lambda\nu\chi+\lambda\tau\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\kappa\mu\\ \beta=\kappa\nu\\ \gamma=\kappa\tau+\lambda\mu\\ \delta=\lambda\nu\\ \varepsilon=\lambda\tau\end{cases}\;\overset{\alpha\beta\delta\neq 0}{\Rightarrow}\begin{cases}\kappa\,\tau=\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon\\ \lambda\,\mu=\dfrac{\delta}{\beta}\alpha\\ \gamma=\kappa\tau+\lambda\mu\end{cases}\Rightarrow\;\gamma=\frac{\beta}{\delta}\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\alpha$$

Αντιστρόφως αν $\gamma=\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon+\dfrac{\delta}{\beta}\alpha$ τότε

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\left(\frac{\beta}{\delta}\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\alpha\right)\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=$$

$$=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\left(\frac{\beta}{\delta}\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\alpha\right)\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\frac{\beta}{\delta}\varepsilon\,\chi^2+\frac{\delta}{\beta}\alpha\,\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{\delta}\chi^2\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)+\frac{1}{\beta}\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)=\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{\delta}\chi^2+\frac{1}{\beta}\right)$$

Παράδειγμα

$$\frac{-21}{14}(-8)+\frac{14}{-21}6=12-4=8$$

$$6\chi^4-21\chi^3+8\chi^2+14\chi-8=$$

$$=6\chi^4-21\chi^3+12\chi^2-4\chi^2+14\chi-8=$$

$$=3\chi^2\left(2\chi^2-7\chi+4\right)-2\left(2\chi^2-7\chi+4\right)\;=\;\left(2\chi^2-7\chi+4\right)\left(3\chi^2-2\right)$$

<u>Παρατήρηση</u>: *Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές*