ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ Ν. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ:

- Συνοπτική Θεωρία
- Μέθοδοι επίλυσης ασκήσεων
- Αναλυτικοί τρόποι σκέψης
- Λυμένα παραδείγματα
- Άλυτες ασκήσεις

2) Εξισώσεις με απόλυτη τιμή παράστασης του αγνώστου (βασική σκέψη, να "διώξω" το απόλυτο)

Περίπτωση: 1η Μέσα σε όλα τα απόλυτα, έχω την ίδια παράσταση του αγνώστου ($|A(\chi)|$)

→ Επιλύω την εξίσωση ως προς άγνωστο το απόλυτο → Καταλήγω: $|A(\chi)| = B$ ***(1)***

ή $|A(\chi)| = B(\chi)$ ***(2)***

Για την ***(1)*** έχω: αν $B<0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

αν $B=0$ τότε η ***(1)*** $\Leftrightarrow A(\chi)=0 \Leftrightarrow$ .... (..λύνω..)

αν $B>0$ τότε η ***(1)*** $\Leftrightarrow A(\chi)=B$ *(i)* ή $A(\chi)=-B$ *(ii)*

και λύνω τις *(i)* και *(ii)*

Για την ***(2)*** βάζω τον περιορισμό: $B(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow$ ...... (..λύνω την ανίσωση ως προς χ..).

συνεχίζω: ***(2)*** $\Leftrightarrow A(\chi)=B(\chi)$ *(i)* ή $A(\chi)=-B(\chi)$ *(ii)*

Να λύσετε την εξίσωση: $|2\chi-3|-14=\chi^2-|9-6\chi|-|\chi^2+2|$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. Κοινός παράγοντας απ' ***όλους*** τους όρους

π.χ $8\chi y^3 - 6\chi^2 y^2 \omega + 2\chi y^2 =$
$2\chi y^2 (4y - 3\chi\omega + 1)$

Για να βγάλω κοινό παράγοντα από τους αριθμούς (συντελεστές μονώνυμων) βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ ενώ από τα γράμματα (κύριο μέρος μονώνυμων), παίρνουμε τα κοινά , στον μικρότερο εκθέτη

2. Ομαδοποίηση

Συνήθως για άρτιο πλήθος όρων

Χωρίζουμε το πολυώνυμο που έχουμε να παραγοντοποιήσουμε σε ομάδες και από κάθε ομάδα βγάζουμε ό,τι μπορούμε κοινό παράγοντα.
Η ομαδοποίηση θεωρείται ¨πετυχημένη¨ αν κάθε ομάδα μετά την παραγοντοποίησή της ¨δώσει ίδια παρένθεση¨

π.χ $\underline{6\chi^2} + \underline{3\chi y} - \underline{\underline{4\chi}} - \underline{\underline{2y}} =$

$3\chi\,(2\chi + y) - 2\,(2\chi + y) =$

$(2\chi + y)(3\chi - 2)$

* Παρατηρώ ότι δεν βγαίνει κοινός παράγοντας απ' όλους τους όρους
* Δοκιμάζω ομαδοποίηση παίρνοντας ως μία ομάδα $1^{\underline{o}} - 2^{\underline{o}}$ όρο και άλλη ομάδα $3^{\underline{o}} - 4^{\underline{o}}$ όρο

Η ομαδοποίηση ¨πέτυχε¨ αφού έδωσαν κοινή παρένθεση την $(2\chi + y)$

Παρατηρήσεις

1. Μετά την ομαδοποίηση παρουσιάστηκαν οι δύο όροι $3\chi\,(2\chi + y)$, $-2\,(2\chi + y)$ που έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση $(2\chi + y)$
2. Αν δεν μας ¨πετύχαινε¨ η ομαδοποίηση $1^{\underline{ος}} - 2^{\underline{ος}}$ όρος και $3^{\underline{ος}} - 4^{\underline{ος}}$ όρος, θα δοκίμαζα $1^{\underline{ος}} - 3^{\underline{ος}}$ όρος και $2^{\underline{ος}} - 4^{\underline{ος}}$ όρος κ.ο.κ

3. Ταυτότητες

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \rightarrow (\alpha + \beta)^2$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \rightarrow (\alpha - \beta)^2$

$\alpha^2 - \beta^2 \rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

$\alpha^3 - \beta^3 \rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 + \beta^3 \rightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \rightarrow (\alpha + \beta)^3 \\ \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \rightarrow (\alpha - \beta)^3 \end{array}\right\}$$

Σπάνια και δεν πειράζει αν δεν τις δούμε
Απλά όταν τις προσέξουμε θα κάνουμε γρηγορότερα την παραγοντοποίηση

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \underset{\acute{\eta}\ \alpha=\beta=\gamma}{\overset{\alpha+\beta+\gamma=0}{\longrightarrow}} 3\alpha\beta\gamma$

π.χ * $4\chi^2-9=(2\chi)^2-3^2=(2\chi-3)(2\chi+3)$

* $\chi^6-1=(\chi^3)^2-1^2=(\chi^3-1)(\chi^3+1)=(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$

* $(2\chi-3)^2-(4\chi+5)^2=[(2\chi-3)-(4\chi+5)][(2\chi-3)+(4\chi+5)]=$

$[2\chi-3-4\chi-5][2\chi-3+4\chi+5]=(-2\chi-8)(6\chi+2)=$

$-2(\chi+4)2(3\chi+1)=-4(\chi+4)(3\chi+1)$

Παρατήρηση : Η παραγοντοποίηση τελειώνει, ΜΟΝΟ όταν δεν γίνεται κανένα άλλο από τα βήματα παραγοντοποίησης που μαθαίνουμε

Εδώ κάθε παρένθεση δίνει κοινό παράγοντα η μεν 1η το -2 η δε 2η το 2

* $\alpha^2+2\alpha\beta-\delta^2+2\delta\gamma+\beta^2-\gamma^2=$

$(\alpha+\beta)^2-(\delta^2-2\delta\gamma+\gamma^2)=$

$(\alpha+\beta)^2-(\delta-\gamma)^2=$

$[(\alpha+\beta)-(\gamma-\delta)][(\alpha+\beta)+(\gamma-\delta)]=$

$(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$

Έχω πολλά τετράγωνα και διπλάσια γινόμενα …….Ψάχνω για ταυτότητα ¨ανάπτυγμα τετραγώνου¨
Έχω δύο τέτοιες ταυτότητες , τις σχηματίζουν οι 1ος – 2ος – 5ος όρος και 3ος – 4ος – 6ος όρος

* $4\chi^2-12\chi+9=$

$(2\chi)^2-2\cdot2\chi\cdot3+3^2=(2\chi-3)^2$

Τετράγωνο …... – τρείς όροι ….. ίσως έχω ανάπτυγμα, αθροίσματος ή διαφοράς, τετραγώνου
$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$

* $8-27\chi^3=2^3-(3\chi)^3=(2-3\chi)(2^2+2\cdot3\chi+(3\chi)^2)=(2-3\chi)\cdot(2^2+6\chi+9\chi^2)$

* $(5-4\chi)^3+(\chi-6)^3+(3\chi+1)^3=$ (Α)

παρατηρώ ότι $(5-4\chi)+(\chi-6)+(3\chi+1)=0$ άρα (Α) $=3(5-4\chi)(\chi-6)(3\chi+1)$

4. Τριώνυμο 2ου βαθμού $\boldsymbol{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}$

$\boxed{\alpha}$ $\chi^2+s\cdot\chi+p$, με $s,p\in\mathbb{R}$ Ψάχνω δύο αριθμούς $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\boxed{\begin{array}{l}1.\to\kappa\cdot\lambda=p\\2.\to\kappa+\lambda=s\end{array}}$

π.χ * $\chi^2-3\chi-10=(\chi+2)(\chi-5)$

-10				
-1	•	10	$\xrightarrow{+}$	9
1	•	-10	$\xrightarrow{+}$	-9
-2	•	5	$\xrightarrow{+}$	3
2	•	-5	$\xrightarrow{+}$	-3

* $\chi^2+4\chi+3=(\chi+1)(\chi+3)$

3				
1	•	3	$\xrightarrow{+}$	4

$\boxed{\beta_1}$ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$

► Βρίσκω τη Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

Αν $\Delta<0$ δεν παραγοντοποιείται

Αν $\Delta=0$ είναι ταυτότητα $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2\to(\alpha\pm\beta)^2$

Αν $\Delta > 0$ Βρίσκω τις ρίζες $\chi_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και έχω

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \chi_1)\cdot(\chi - \chi_2)$$

π.χ * $3\chi^2 + 5\chi - 8 =$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 121 > 0$

$\chi_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \begin{cases} \nearrow \ \chi_1 = 1 \\ \searrow \ \chi_2 = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$

$$= 3(\chi - 1)\left(\chi + \frac{8}{3}\right) = (\chi - 1)(3\chi + 8)$$

* $3\chi^2 + 5\chi + 5 =$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = -35 < 0$

δεν παραγοντοποιείται

* $3\chi^2 + 12\chi + 12 =$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$

άρα ταυτότητα

$$= 3(\chi^2 + 4\chi + 4) = 3(\chi + 2)^2$$

$\boxed{\beta_2}$ $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

Και γενικά
$\alpha\chi^2 + \beta\chi y + \gamma y^2$

- ► Ελέγχω μήπως $\pm\alpha \pm \gamma = \beta$
- ► αντικαθιστώ το β με το $\pm\alpha \pm \gamma$
- ► κάνω ομαδοποίηση

π.χ * $3\chi^2 + 5\chi - 8 =$

$-3 + 8 = 5$

$$3\chi^2 + (-3 + 8)\chi - 8 = \underline{3\chi^2} - \underline{3\chi} + \underline{\underline{8\chi}} - \underline{\underline{8}} = 3\chi(\chi - 1) + 8(\chi - 1) = (\chi - 1)(3\chi + 8)$$

* $4\chi^2 + 7\chi y + 3y^2 =$

$4 + 3 = 7$

$$4\chi^2 + (4 + 3)\chi y + 3y^2 = \underline{4\chi^2} + \underline{4\chi y} + \underline{\underline{3\chi y}} + \underline{\underline{3y^2}} = 4\chi(\chi + y) + 3y(\chi + y) =$$
$$(\chi + y)(4\chi + 3y)$$

$\boxed{\gamma}$ Αν έχουμε τρεις όρους που είναι ΄΄πολύ κοντά΄΄ στην ταυτότητα $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \to (\alpha \pm \beta)^2$ και για να φτάσω σ' αυτήν χρειάζεται να προσθέσω μονώνυμο άρτιου βαθμού (το μονώνυμο ήδη υπάρχει) τότε προσθέτω και αφαιρώ τον όρο που χρειάζομαι. Καταλήγω σε $(\alpha \pm \beta)^2 - \kappa^2 \to (\alpha \pm \beta - \kappa)(\alpha \pm \beta + \kappa)$

π.χ * $\chi^2 - 6\chi y + 8y^2 =$

$\chi^2 - 6\chi y + 9y^2 - y^2 =$

$(\chi - 3y)^2 - y^2 =$

$[(\chi - 3y) - y][(\chi - 3y) + y] = (\chi - 4y)(\chi - 2y)$

Ενώ μοιάζει πάρα πολύ στο ανάπτυγμα διαφοράς στο τετράγωνο, δεν μας βγαίνει αφού θα έπρεπε να έχουμε $\chi^2 - 2\cdot\chi\cdot 3y + (3y)^2 \to \chi^2 - 6\chi y + \mathbf{9y^2}$

Παρατήρηση Μπορώ να προσθέσω και μετά να αφαιρέσω έναν όρο που έχει άρτιο εκθέτη, για να συμπληρώσω την ταυτότητα $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$. Μετά θα προκύψει ΔΙΑΦΟΡΑ τετραγώνων

* $\chi^4+\chi^2+1=\chi^4+2\chi^2+1-\chi^2=\left(\chi^2+1\right)-\chi^2=$

$\left[\left(\chi^2+1\right)-\chi\right]\left[\left(\chi^2+1\right)+\chi\right]=\left(\chi^2+\chi+1\right)\left(\chi^2-\chi+1\right)$

<u>Γενικά παραδείγματα – Παρατηρήσεις</u>

* $3\chi^2-12\chi y+9y^2=3\left(\chi^2-4\chi y+3y^2\right)=3\left[\chi^2-(1+3)\chi y+3y^2\right]=$

$3\left[\chi^2-\chi y-3\chi y+3y^2\right]=3\left[\chi(\chi-y)-3y(\chi-y)\right]=3(\chi-y)(\chi-3y)$

* $\left(\chi^2+3\chi+1\right)^2-12\left(\chi^2+3\chi+1\right)+11=$

$$\begin{array}{ccccc} & & 11 & & \\ 1 & \bullet & 11 & \xrightarrow{+} & 12 \\ -1 & \bullet & -11 & \xrightarrow{+} & -12 \end{array}$$

$\left[\left(\chi^2+3\chi+1\right)-1\right]\left[\left(\chi^2+3\chi+1\right)-11\right]=\left(\chi^2+3\chi\right)\left(\chi^2+3\chi-10\right)=\chi(\chi+3)(\chi-2)(\chi+5)$

* $3\chi^2-12=3\left(\chi^2-4\right)=3(\chi-2)(\chi+2)$

* $16-54\chi^3=2\left(8-27\chi^3\right)=2(2-3\chi)\left(4+6\chi+9\chi^2\right)$

* $2\chi\alpha-4\chi\beta-\alpha^2+4\beta^2=$

$2\chi(\alpha-2\beta)-\left(\alpha^2-4\beta^2\right)=$

$2\chi(\alpha-2\beta)-(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)=$

$(\alpha-2\beta)\left[2\chi-(\alpha+2\beta)\right]=(\alpha-2\beta)(2\chi-\alpha-2\beta)$

Δεν βγαίνει κοινός παράγοντας και η ομαδοποίηση με τον τρόπο που την έχουμε αναφέρει δεν ¨πετυχαίνει¨. Όμως βλέπω την ταυτότητα ¨διαφορά τετραγώνων¨ ($3^{ος}$ - $4^{ος}$ όρος) και οι υπόλοιποι όροι($1^{ος}$ – $2^{ος}$ όρος) δίνουν κοινό παράγοντα. Συνεχίζοντας αυτού του είδους την εργασία παρατηρώ ότι μου βγαίνει η παραγοντοποίηση

* $(3\chi+5)^3-(3\chi+3)^3-8=(3\chi+5)^3+(-3\chi-3)^3+(-2)^3=(\mathrm{A})$

Παρατηρώ ότι $(3\chi+5)+(-3\chi-3)+(-2)=0$ άρα από ταυτότητα Euler θα έχω

$(\mathrm{A})=3(3\chi+5)(-3\chi-3)(-2)=-18(3\chi+5)(\chi+1)$

<u>Γενική παρατήρηση 1</u> Μπορώ να ομαδοποιήσω ένα πολυώνυμο, έτσι ώστε η κάθε ομάδα να παραγοντοποιείται, είτε βγάζοντας κοινό παράγοντα, είτε επειδή έχω ταυτότητα, είτε είναι τριώνυμο, αρκεί μετά να έχω στους όρους που προκύπτουν *κοινό παράγοντα.* - *(κοινή παρένθεση)*

<u>Γενική παρατήρηση 2</u> Αν υπάρχουν έτοιμες παρενθέσεις δεν βιάζομαι να τις απαλείψω. (Ίσως να έχω έτοιμη μια πρώτη ομαδοποίηση). Συνεχίζω την παραγοντοποίηση των ομάδων που υπάρχουν ψάχνοντας για κοινούς παράγοντες (ίδιες παρενθέσεις) οπότε έχουμε ¨πετυχημένη¨ ομαδοποίηση

* $\chi^3-8-(\chi-2)(\chi+6)=\left(\chi^3-8\right)-(\chi-2)(\chi+6)=$

$(\chi-2)\left(\chi^2+2\chi+4\right)-(\chi-2)(\chi+6)=(\chi-2)\left[\left(\chi^2+2\chi+4\right)-(\chi+6)\right]=$

$(\chi-2)\left(\chi^2+2\chi+4-\chi-6\right)=(\chi-2)\left(\chi^2+\chi-2\right)=(\chi-2)(\chi+2)(\chi-1)$

ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ

1. Έχει σημασία η σειρά με την οποία σκέφτομαι τα βήματα που κάνω για να παραγοντοποιήσω μια πολυωνυμική παράσταση. (κοινός παράγοντας – ομαδοποίηση- ταυτότητες – τριώνυμο)

π.χ * $\chi^6 - y^6 = \left(\chi^2\right)^3 - \left(y^2\right)^3 = \left(\chi^2 - y^2\right)\left(\left(\chi^2\right)^2 + \chi^2 y^2 + \left(y^2\right)\right) =$

$$\left(\chi - y\right)\left(\chi + y\right)\left(\chi^4 + \chi^2 y^2 + y^4\right) = \left(\chi - y\right)\left(\chi + y\right)\left(\chi^4 + 2\chi^2 y^2 + y^4 - \chi^2 y^2\right) =$$

$$\left(\chi - y\right)\left(\chi + y\right)\left[\left(\chi^2 + y^2\right)^2 - \chi^2 y^2\right] = \left(\chi - y\right)\left(\chi + y\right)\left(\chi^2 + y^2 - \chi y\right)\left(\chi^2 + y^2 + \chi y\right)$$

Εφάρμοσα πρώτα την ταυτότητα $\alpha^3 - \beta^3$ αντί της $\alpha^2 - \beta^2$

β΄ τρόπος

$$\chi^6 - y^6 = \left(\chi^3\right)^2 - \left(y^3\right)^2 = \left(\chi^3 - y^3\right)\left(\chi^3 + y^3\right) =$$

$$\left(\chi - y\right)\left(\chi^2 + \chi y + y^2\right)\left(\chi + y\right)\left(\chi^2 - \chi y + y^2\right)$$

Εφάρμοσα πρώτα την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2$ αντί της $\alpha^3 - \beta^3$, όπως είναι σημειωμένες στις παραπάνω μεθόδους

2. Η παραγοντοποίηση έχει σίγουρα τελειώσει, όταν έχω φτάσει σε γινόμενο στο οποίο οι παρενθέσεις έχουν μέσα τους πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού από τους όρους του οποίου δεν βγαίνει κοινός παράγοντας

3. Αν σε κάποια παρένθεση υπάρχει πολυώνυμο βαθμού $\geq 2^{ου}$, θα έχω τελειώσει την παραγοντοποίηση ***μόνο*** αν δεν εφαρμόζεται κανένα από τα παραπάνω βήματα !

[τα τριώνυμα $\chi^2 - \chi y + y^2$ και $\chi^2 + \chi y + y^2$ που προκύπτουν από τις ταυτότητες $\chi^3 + y^3$ και $\chi^3 - y^3$ αντίστοιχα δεν παραγοντοποιούνται περαιτέρω]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $4x^2y - 8x^3y^2 + 12x^2y^2$ (ii) $12xy^2\omega - 6x\omega^2 + xy\omega$

(iii) $2xy - 4\omega$ (iv) $6xyk - 3xk^2 + 5yk^3$

(v) $2\chi(\alpha-\beta)^2 - 6\chi^2(\alpha-\beta) + 4\chi(\alpha-\beta)$ (vi) $2\chi^2 - 3\chi - 2\alpha\chi + 3\alpha$

(vii) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2 - 3(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta) + 4\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ (viii) $\chi^3 - 2\alpha\chi - 6\alpha\beta + 3\beta\chi^2$

(ix) $\alpha\chi + 2\beta - \alpha - 2\beta\chi$ (x) $(\alpha+\beta)^2 - \chi(\alpha+\beta) + 2\chi - 2(\alpha+\beta)$

(xi) $(2\alpha-\beta)^2 - 3\beta\chi - \chi(2\alpha-\beta) + 3\beta(2\alpha-\beta)$ (xii) $\alpha^2 - \chi^2 + 4\alpha - 2\chi + 3$

2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $4\chi^2-9$ (ii) $9\chi^2-6\alpha\chi+\alpha^2$ (iii) $\chi^4-2\chi^2+1$ (iv) $3\chi^2-6\chi y+3y^2$

(v) $4\chi^2-36y^2$ (vi) $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)+(3\alpha+\beta)^2$

(vii) $\alpha^2+2\alpha\chi-\beta^2+\chi^2$ (viii) $4\chi^4-4y^4$ (ix) $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta\chi-\chi^2$

(x) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-y^2+2y\chi-\chi^2$ (xi) $\chi^3-\alpha^3$ (xii) $8-\alpha^3$

(xiii) $27-\beta^3$ (xiv) χ^6-64 (xv) $5\chi^4-40\chi$ (xvi) $\chi^6+2\chi^3+1$

(xvii) $4\chi^3-12\chi$ (xviii) $(\alpha+\beta)^3-2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

(xix) $(\alpha^2+\beta-1)^2-2\beta(\alpha^2+\beta-1)+\beta^2$

3) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $4\chi^2-16$ (ii) $3\chi^2-6\alpha\chi+3\alpha^2$ (iii) $2\alpha^3-54$ (iv) $4\chi^2-24\chi+36$

(v) $-3\chi^4+48$ (vi) $2(\chi^2-4\chi+4)-4(\chi+2)(\chi-2)+2\chi^2+8\chi+8$

(vii) $2(\chi^3-1)+(\chi^2+\chi+1)^2+\chi^2-2\chi+1$ (viii) $(\chi-1)^2-2(3\chi-1)(\chi-1)+9\chi^2-6\chi+1$

(ix) $(\chi^2+2\chi-2)^2+2(\chi^2+2\chi-2)-3$

4) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(i) $(\chi^2-4)^2-9\chi^2$ (ii) $\chi^2+\chi-2$ (iii) $3\chi^2-3\chi-6$ (iv) $4\chi^2-5\chi-6$

(v) $\chi^2+7\chi-3$ (vi) $2\chi^2+(2-\sqrt{3})\chi-\sqrt{3}$ (vii) $\chi^2+(2-\sqrt{3})\chi-2\sqrt{3}$

(viii) $3\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2$ (ix) χ^6+y^6 (x) $\chi^4+3\chi^2+4$ (xi) $(\alpha+\beta)^3-4\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2$

(xii) $(\chi^2-\chi)^2-8(\chi^2-\chi)+12$ (xiii) $2\chi^2-4$ (xiv) $3\chi^4-12\chi^2+9$

(xv) $2\chi^5-2\chi^3+8\chi^2-8\chi$ (xvi) $4\alpha^2-12\alpha\beta+5\beta^2$ (xvii) $\chi^2-5\chi+6$

(xviii) $\chi^3-(5\chi+6)^3+8(2\chi+3)^3$ (xix) $\chi^3-3\chi^2+3\chi-1+(2\chi-3)^3+(4-3\chi)^3$